

© 2024 г. Л.М. БЕРЛИН (berlin.lm@phystech.edu),
А.А. ГАЛЯЕВ, д-р техн. наук (galaev@ipu.ru),
П.В. ЛЫСЕНКО, канд. физ.-мат. наук (pavellysen@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА И МЕТОД НЕЙШТАДТА–ИТОНА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ГРУППОЙ НЕСИНХРОННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ¹

Рассматривается задача оптимального управления группой, состоящей из произвольного числа несинхронных осцилляторов с общим скалярным управляющим воздействием, по критерию быстродействия. Проведено аналитическое исследование задачи. Доказано свойство сильной достижимости и глобальной управляемости, найдено программное управление, которое переводит систему из начала координат в фиксированную точку по критерию быстродействия. Для перевода группы осцилляторов в состояние покоя найдены траектории, удовлетворяющие как уравнениям движения системы, так и дополнительным уравнениям, полученным на основе матричных условий невырожденности релейного управления. Проведено сравнение классификаций траекторий по количеству переключений управления, найденных с использованием необходимых условий экстремума и численного алгоритма Нейштадта–Итона.

Ключевые слова: принцип максимума Понтрягина, оптимальное управление, несинхронные осцилляторы, итерационный процесс Итона, уравнение Нейштадта, сильная достижимость, глобальная управляемость, геометрическая теория управления.

DOI: 10.31857/S0005231024060071, EDN: XWRNLI

1. Введение

В 60-х годах XX в. американские математики Итон и Нейштадт предложили итерационный метод [1, 2] поворота опорной гиперплоскости для поиска решения задачи оптимального управления (ЗОУ) по критерию быстродействия на основе идей выпуклого программирования. Итерационный алгоритм позволяет вычислить начальный вектор сопряженной системы, который используется для определения оптимальной траектории исходной системы, удовлетворяющей заданным граничным условиям, и применим в случае выпуклого множества достижимости. Одна из проблем указанного подхода заключается в том, что одному стартовому состоянию системы может соответствовать бесконечное количество неколлинеарных между собой начальных

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта молодежных научных школ Института проблем управления РАН 2023–2025.

векторов сопряженной системы [3], что существенно влияет на сходимость алгоритма. В [4] подчеркивается, что сходимость приведенного алгоритма возможна только в случае, когда область достижимости обладает свойством строгой выпуклости. Проверка указанного свойства не представляется возможной для нелинейных задач. В свою очередь, для управляемых линейных систем выпуклость множества достижимости следует из компактности и выпуклости множества допустимых управлений [5]. Линейная задача быстрогодействия для системы несинхронных осцилляторов с выпуклым множеством допустимых управлений обладает необходимым свойством строгой выпуклости множества достижимости. Способ учета неопределенности в выборе шага алгоритма Нейштадта–Итона, от которого существенно зависит скорость сходимости, предлагается в [6]. Предложение по улучшению сходимости метода было рассмотрено в [7]. Еще один итерационный метод минимакса на основе функции Минковского представлен в [8], где приведена интерпретация вышеуказанных методов в сопряженном пространстве. Итерационный алгоритм расчета оптимального по быстрдействию решения для линейных систем на основе принципа максимума приводится в [9]. Вопросам сходимости численных методов в оптимизационных задачах были посвящены ранние работы Б.Т. Поляка, например [10].

Другие методы нахождения приближенных решений задач быстрогодействия для линейных систем разнообразны и представляют определенный интерес с точки зрения широты используемых подходов. Методы поиска управления в реальном времени, основанные на идее предварительной аппроксимации областей достижимости и вычисления начального вектора сопряженной системы в процессе управления, рассмотрены в [11]. Симплексные покрытия выпуклой оболочки множества достижимости лежат в основе итерационного алгоритма, использование которого предлагается в работе для поиска минимального времени движения линейной [12] и нелинейной [13] управляемых систем, такого что начало координат будет принадлежать границе области достижимости. Техника инвариантных эллипсоидов, развитая Б.Т. Поляком и его соавторами [14], является основой для построения эффективных оценок множества достижимости систем с внешними возмущениями.

Для задачи успокоения произвольного числа линейных осцилляторов с общим скалярным управлением в [15] было получено асимптотическое оптимальное управление в форме синтеза, где объединяются несколько подходов. Первая идея заключается в использовании нормали к приближенной области достижимости как начального вектора для сопряженных переменных при больших энергиях. Использование управления с уменьшенной верхней границей позволяет системе достичь малой окрестности нуля. И наконец, метод обобщенных функций Ляпунова применяется для построения синтеза в окрестности терминального положения. Для платформы с произвольным количеством линейных осцилляторов исследована структура управления [16], представленная единственной внешней ограниченной силой.

Данная статья посвящена задаче ограниченного скалярного управления группой несинхронных осцилляторов по критерию быстродействия, для которой, насколько известно авторам, алгоритм Нейштадта–Итона не применялся. Поэтому возникла идея сравнить аналитические результаты, полученные ранее для двух несинхронных осцилляторов в части разбиения плоскости начальных значений первого осциллятора по классам управлений [17], а также распространить алгоритм на группу, состоящую из большего числа осцилляторов [18].

Статья состоит из введения, шести разделов, заключения и имеет следующую структуру. В разделе 2 приводится постановка задачи оптимального управления для системы N несинхронных осцилляторов по критерию быстродействия с ограниченным скалярным управлением. Раздел 3 рассматривает вопросы управляемости системы, а именно связывает управления, переводящие на границу множества достижимости, с управлениями, переводящими систему в начало координат. В разделе 4 согласно принципу максимума Понтрягина получено оптимальное управление, содержащее в качестве неизвестных параметров константы из фундаментального решения сопряженной системы. В разделе 5 приводятся необходимые условия экстремума в виде нелинейных матричных равенств. В разделе 6 описывается применение численной процедуры Нейштадта–Итона для поиска начального вектора сопряженной системы для построения приближенного к оптимальному управления. Полученные результаты иллюстрируются моделированием в разделе 7. После чего в заключении 8 формируются планы дальнейшей работы.

2. Постановка задачи оптимального управления группой осцилляторов

Рассматривается линейная задача оптимального управления для N несинхронных осцилляторов, связанных ограниченным скалярным управлением [18]. Динамика управляемой системы описывается следующими уравнениями:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{q}_i(t) = p_i(t), \\ \dot{p}_i(t) = -\omega_i^2 q_i(t) + u(t), \end{cases} \quad i = 1, \dots, N. \\ \omega_j \neq \omega_k, \quad \forall j \neq k, \quad j, k = 1, \dots, N \\ \mathbf{x}(t) = (q_1(t), p_1(t), \dots, q_N(t), p_N(t))^T \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Компоненты $q_i(t), p_i(t)$ вектора состояния $\mathbf{x}(t)$ являются координатой и импульсом i -го осциллятора с частотой колебаний ω_i , $i = 1, \dots, N$. Область значений управления \mathbb{U} задается отрезком на прямой:

$$(2) \quad u(t) \in [-\varepsilon, \varepsilon] = \mathbb{U}.$$

Система (1) может быть переписана в матричном виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t),$$

где A – матрица системы, B – матрица управления:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_N \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Целью управления является перевод системы (1) из заданного положения в начало координат

$$(3) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 &= (q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*)^T, \\ \mathbf{x}(T^0) = \mathbf{x}_{T^0} &= (0, 0, \dots, 0, 0)^T. \end{aligned}$$

Время движения системы T^0 – критерий задачи быстродействия

$$(4) \quad T^0[u] = \int_0^{T^0} dt \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathbb{U}}.$$

Для системы (1)–(3) в следующем разделе будет исследована задача управляемости с применением аппарата геометрической теории управления [19].

3. Решение задачи управляемости

Для изучения вопроса управляемости системы (1) с ограничениями (2) перепишем ее как систему векторных полей:

$$(5) \quad \mathcal{F}(\mathbf{x}, u) = \{f_1 + uf_2 \mid u \in \mathbb{U}\},$$

$$(6) \quad \begin{aligned} f_1 &= p_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \dots + p_N \frac{\partial}{\partial q_N} - \omega_1^2 q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} - \dots - \omega_N^2 q_N \frac{\partial}{\partial p_N} = \\ &= \sum_{i=1}^N p_i \frac{\partial}{\partial q_i} - \omega_i^2 q_i \frac{\partial}{\partial p_i}, \end{aligned}$$

$$(7) \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial p_N} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Определение 1. Линейная система (A, B, \mathbb{U}) обладает свойством сильной достижимости, если множество достижимости в ненулевой момент времени имеет непустую внутренность из любого начального состояния системы.

Свойство сильной достижимости для системы (1)–(2) устанавливается из теоремы Суссмана–Джарджевича [20].

Теорема 1 (Суссман–Джарджевич). Аналитическая система $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ обладает свойством сильной достижимости из точки x тогда и только тогда, когда размерность идеала алгебры Ли, порожденного системой, совпадает с размерностью пространства состояний

$$(8) \quad \dim \mathcal{L}_0(x) = 2N.$$

Лемма 1. Система (1) с ограничениями (2) является сильно достижимой.

Доказательство. Приводится вычисление всех ненулевых векторных полей для последующего определения размерности идеала алгебры Ли.

$$f_3 = [f_1, f_2] = - \begin{pmatrix} F_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & F_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_i},$$

где введены обозначения:

$$F_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N.$$

$$f_4 = [f_1, f_3] = - \begin{pmatrix} F_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & F_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_1^2 \\ \dots \\ 0 \\ -\omega_N^2 \end{pmatrix} = - \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \frac{\partial}{\partial p_i},$$

$$f_5 = [f_1, f_4] = - \begin{pmatrix} F_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & F_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_1^2 \\ \dots \\ 0 \\ -\omega_N^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ 0 \\ \dots \\ \omega_N^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \frac{\partial}{\partial q_i},$$

$$f_6 = [f_1, f_5] = - \begin{pmatrix} F_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & F_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ 0 \\ \dots \\ \omega_N^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1^4 \\ \dots \\ 0 \\ \omega_N^4 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \omega_i^4 \frac{\partial}{\partial p_i},$$

...

$$f_{2N} = [f_1, f_{2N-1}] = (-1)^{N-1} \sum_{i=1}^N \omega_i^{2N-2} \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad N \geq 1,$$

$$f_{2N+1} = [f_1, f_{2N}] = (-1)^N \sum_{i=1}^N \omega_i^{2N-2} \frac{\partial}{\partial q_i}, \quad N \geq 1.$$

Система $2N$ векторных полей $\{f_2, f_3, \dots, f_{2N}, f_{2N+1}\}$ является линейно независимой, что устанавливается из определителя

$$(9) \quad \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \omega_1^2 & \dots & 0 & (-1)^N \omega_1^{2N-2} \\ 1 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & \dots & (-1)^{N-1} \omega_1^{2N-2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 & (-1)^N \omega_2^{2N-2} \\ 1 & 0 & -\omega_2^2 & 0 & \dots & (-1)^{N-1} \omega_2^{2N-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \omega_N^2 & \dots & 0 & (-1)^N \omega_N^{2N-2} \\ 1 & 0 & -\omega_N^2 & 0 & \dots & (-1)^{N-1} \omega_N^{2N-2} & 0 \end{pmatrix},$$

который посредством элементарных преобразований приводится к определителю блочно-диагональной матрицы

$$(10) \quad \det \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} = (\det(W))^2 = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq N} (\omega_j^2 - \omega_i^2) \right)^2 \neq 0$$

в силу системы (1), что, с опорой на теорему 1, заканчивает доказательство леммы. При вычислении определителя была введена матрица

$$W = \begin{pmatrix} 1 & \omega_1^2 & \dots & \omega_1^{2N-2} \\ 1 & \omega_2^2 & \dots & \omega_2^{2N-2} \\ 1 & \omega_3^2 & \dots & \omega_3^{2N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^2 & \dots & \omega_N^{2N-2} \end{pmatrix},$$

которая совпадает с матрицей Вандермонда, свойство определителя которой и было использовано в (10) [16].

Определение 2. Линейная система (A, B, \mathbb{U}) называется глобально управляемой в нуле, если для любого начального условия $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{2N}$ существует управление $u \in \mathbb{U}$ такое, что соответствующая траектория достигает точки $\mathbf{x}(T^0) = 0$ для некоторого $T^0 \in [t_0, \infty)$.

На вопрос о глобальной управляемости линейной системы в нуле при наличии ограничений на управление отвечает теорема из [21].

Теорема 2 (ЛаСалль, Конти). Автономная система (A, B, \mathbb{U}) при $\mathbb{U} \in \mathbb{R}^m$ и $\text{int} \mathbb{U} \neq \emptyset$ глобально управляема в нуле тогда и только тогда, когда:

- 1) $\text{rank}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$.
- 2) $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ для каждого собственного значения λ_i матрицы A .

Лемма 2. Система (1) с ограничением (2) является глобально управляемой (вполне управляемой).

Доказательство. Первое условие теоремы 2 эквивалентно условию (8) теоремы 1. Кроме того, для системы (1) $\text{Re}(\lambda_i) = 0$. Таким образом, теорема 2 выполнена и система (1) является глобально управляемой в нуле.

Докажем свойство глобальной управляемости с помощью конкретного построения, используя общее решение дифференциального уравнения (1) с начальным состоянием $(q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*)$.

$$(11) \quad \begin{cases} q_i(t) = \frac{p_i^*}{\omega_i} \sin(\omega_i t) + q_i^* \cos(\omega_i t) + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t \sin(\omega_i(t - \tau)) u(\tau) d\tau, \\ p_i(t) = p_i^* \cos(\omega_i t) - q_i^* \omega_i \sin(\omega_i t) + \int_0^t \cos(\omega_i(t - \tau)) u(\tau) d\tau, \end{cases} \\ i = 1, \dots, N.$$

Управляемость в нуле гарантирует существование управления $u(t)$ такого, что в некоторый момент t_1 вектор состояния $x(t_1)$ совпадет с началом координат.

$$(12) \quad \begin{cases} -\frac{p_i^*}{\omega_i} \sin(\omega_i t_1) - q_i^* \cos(\omega_i t_1) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^{t_1} \sin(\omega_i(t_1 - \tau)) u(\tau) d\tau, \\ -p_i^* \cos(\omega_i t_1) + q_i^* \omega_i \sin(\omega_i t_1) = \int_0^{t_1} \cos(\omega_i(t_1 - \tau)) u(\tau) d\tau, \end{cases} \\ i = 1, \dots, N.$$

Покажем связь между управлением $u(t)$ и управлением $u_0(t)$, переводящим систему из начала координат в точку $(q_1^*, -p_1^*, \dots, q_N^*, -p_N^*)$ за время t_0 . Такое решение представляется в виде

$$(13) \quad \begin{cases} q_i^* = \frac{1}{\omega_i} \int_0^{t_0} \sin(\omega_i(t_0 - \tau)) u_0(\tau) d\tau, \\ -p_i^* = \int_0^{t_0} \cos(\omega_i(t_0 - \tau)) u_0(\tau) d\tau, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N.$$

Подставляя (13) в (12), получим:

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{1}{\omega_i} \int_0^{t_0} \sin(\omega_i(t_1 - t_0 + \tau)) u_0(\tau) d\tau = \frac{1}{\omega_i} \int_0^{t_1} \sin(\omega_i(t_1 - \tau)) u(\tau) d\tau, \\ \int_0^{t_0} \cos(\omega_i(t_1 - t_0 + \tau)) u_0(\tau) d\tau = \int_0^{t_1} \cos(\omega_i(t_1 - \tau)) u(\tau) d\tau, \end{cases} \\ i = 1, \dots, N.$$

Выбирая $t_1 = t_0$, $u(t) = u_0(t_1 - t)$, получаем, что система обладает свойством глобальной управляемости в силу произвольности $(q_1^*, -p_1^*, \dots, q_N^*, -p_N^*)$.

Замечание 1. Управляемое состояние $(q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*)$, откуда начало координат достигается с управлением $u(t)$ за время t_0 , соответствует достижимому состоянию $(q_1^*, -p_1^*, \dots, q_N^*, -p_N^*)$ с управлением $u(t)$, взятым в обратном времени за то же самое время.

4. Уравнения принципа максимума

Далее приводятся утверждения принципа максимума Понтрягина (ПМП) для исследования задачи оптимального управления (1)–(4).

а) Гамильтониан задачи оптимального управления

$$(15) \quad \begin{aligned} h_u &= -\lambda_0 + \xi_1 p_1 + \eta_1(-\omega_1^2 q_1 + u) + \dots + \xi_N p_N + \eta_N(-\omega_N^2 q_N + u) = \\ &= -\lambda_0 + \sum_{i=1}^N \xi_i p_i + \eta_i(-\omega_i^2 q_i + u), \quad -\lambda_0 > 0, \end{aligned}$$

где $\psi(t) = (\xi_1(t), \eta_1(t), \dots, \xi_N(t), \eta_N(t))^T$ – вектор сопряженных переменных, а λ_0 – константа.

б) Гамильтонова система, состоящая из уравнений динамики (1) и сопряженной системы:

$$(16) \quad \begin{cases} \dot{\xi}_i(t) = -\frac{\partial h_u}{\partial q_i} = \omega_i^2 \eta_i(t), \\ \dot{\eta}_i(t) = -\frac{\partial h_u}{\partial p_i} = -\xi_i(t), \end{cases} \quad i = 1, \dots, N.$$

в) Условие максимума:

$$(17) \quad h_{u^*} = \max_{u(\cdot) \in \mathbb{U}} h_u = -\lambda_0 + \sum_{i=1}^N (\xi_i p_i - \eta_i \omega_i^2 q_i) + u^* \sum_{i=1}^N \eta_i.$$

Сопряженная система (16) и ее решение, содержащее $2N$ неизвестных постоянных коэффициентов:

$$(18) \quad \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) = -\omega_1^2 \eta_1(t), \\ \dots \\ \ddot{\eta}_N(t) = -\omega_N^2 \eta_N(t); \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_1 = C_1^1 \cos \omega_1 t + C_1^2 \sin \omega_1 t, \\ \dots \\ \eta_N = C_N^1 \cos \omega_N t + C_N^2 \sin \omega_N t. \end{cases}$$

Оптимальное управление u^* определяется из условия максимума (17):

$$(19) \quad u^*(t) = \varepsilon \operatorname{sign} \sum_{i=1}^N \eta_i = \varepsilon \operatorname{sign} \left(\sum_{i=1}^N C_i^1 \cos \omega_i t + C_i^2 \sin \omega_i t \right).$$

В следующем разделе будут выведены необходимые условия экстремума для системы N несинхронных осцилляторов, которые позволят исследовать решение задачи в любом заданном классе переключений релейного управления (19).

5. Необходимые условия экстремума

Управление $u^*(t)$ согласно (19) является релейным. Переключения управления происходят в моменты времени t_m , $m = \overline{1, K-1}$. Пусть τ_n – длительности n -го интервала постоянства управления, $n = \overline{1, K}$. Тогда $u^*(t)$ с $K-1$ переключением и $K \in \mathbb{N}$ интервалами постоянства управления имеет вид с точностью до знака, представленный на рис. 1. Такое управление будем относить к классу с $(K-1)$ -м переключением управления. Учитывая вид оптимального управления $u^*(t)$, можно записать решение (1)–(3) при различных значениях K . Стоит также отметить, что управление на первом интервале может быть выбрано как ε , так и $-\varepsilon$, для чего вводится параметр s , равный 0 и 1 соответственно.

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \cos \left(\omega_i \sum_{k=j}^K \tau_k \right) - \cos \left(\omega_i \sum_{k=1}^K \tau_k \right) = \\ = (-1)^{K-1} + (-1)^s \frac{\omega_i^2}{\varepsilon} \left(\frac{p_i^*}{\omega_i} \sin \omega_i T^0 + q_i^* \cos \omega_i T^0 \right), \\ \\ 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \sin \left(\omega_i \sum_{k=j}^K \tau_k \right) - \sin \left(\omega_i \sum_{k=1}^K \tau_k \right) = \\ = (-1)^s \frac{\omega_i}{\varepsilon} \left(-p_i^* \cos \omega_i T^0 + q_i^* \omega_i \sin \omega_i T^0 \right), \end{array} \right. \quad i = 1, \dots, N.$$

Замечание 2. Система (20), состоящая из $2N$ уравнений, дает возможность исследовать класс $2N-1$ переключений, для которого требуется определить длительности $2N$ интервалов.

Замечание 3. Решение системы (20), отвечающее управлению $u^*(t)$ для начального вектора $x_0 = (q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*)^T$, соответствует $-u^*(t)$ для $-x_0 = (-q_1^*, -p_1^*, \dots, -q_N^*, -p_N^*)^T$.

Для исследования классов управлений с большим количеством переключений приводятся следующие необходимые условия экстремума, аналогичные условиям для двух осцилляторов, полученным в [17].

Лемма 3 (необходимые условия экстремума). *Всякое решение задачи (1)–(4) в классе кусочно-непрерывных управлений (19) удовлетворяет систе-*

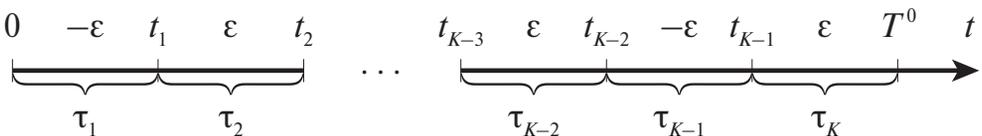


Рис. 1. Вид оптимального управления $u^*(t)$.

ме уравнений (20) и дополнительным $K - 2N$ уравнениям:

$$(21) \quad \det \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t_s) & \cos(\omega_1 t_{s+1}) & \dots & \cos(\omega_1 t_{s+2N-1}) \\ \sin(\omega_1 t_s) & \sin(\omega_1 t_{s+1}) & \dots & \sin(\omega_1 t_{s+2N-1}) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \cos(\omega_N t_s) & \cos(\omega_N t_{s+1}) & \dots & \cos(\omega_N t_{s+2N-1}) \\ \sin(\omega_N t_s) & \sin(\omega_N t_{s+1}) & \dots & \sin(\omega_N t_{s+2N-1}) \end{pmatrix} = 0, \\ s = 1, \dots, K - 2N.$$

Доказательство. Переключение оптимального релейного управления в моменты t_m , $m = 1, \dots, K - 1$ приводит к обнулению (19):

$$(22) \quad \sum_{i=1}^N C_i^1 \cos \omega_i t_m + C_i^2 \sin \omega_i t_m = 0, \quad m = 1, \dots, K - 1.$$

Для компактности запишем все уравнения (22) в матричном виде, а именно,

$$(23) \quad (\mathbf{C}, \mathbf{\Omega}_m) = 0, \quad m = 1, \dots, K - 1,$$

где

$$\mathbf{C} = (C_1^1, C_1^2, \dots, C_N^1, C_N^2), \quad \mathbf{\Omega}_m = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t_m) \\ \sin(\omega_1 t_m) \\ \dots \\ \cos(\omega_N t_m) \\ \sin(\omega_N t_m) \end{pmatrix}.$$

Полученные уравнения (23) перепишем следующим образом:

$$(24) \quad \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t_1) & \cos(\omega_1 t_2) & \dots & \cos(\omega_1 t_{K-2}) & \cos(\omega_1 t_{K-1}) \\ \sin(\omega_1 t_1) & \sin(\omega_1 t_2) & \dots & \sin(\omega_1 t_{K-2}) & \sin(\omega_1 t_{K-1}) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \cos(\omega_N t_1) & \cos(\omega_N t_2) & \dots & \cos(\omega_N t_{K-2}) & \cos(\omega_N t_{K-1}) \\ \sin(\omega_N t_1) & \sin(\omega_N t_2) & \dots & \sin(\omega_N t_{K-2}) & \sin(\omega_N t_{K-1}) \end{pmatrix}^T \times \\ \times \begin{pmatrix} C_1^1 \\ C_1^2 \\ \dots \\ C_N^1 \\ C_N^2 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Условие существования нетривиального вектора \mathbf{C} эквивалентно $K - 2N$ уравнениям вида

$$(25) \quad \det (\mathbf{\Omega}_s, \mathbf{\Omega}_{s+1}, \dots, \mathbf{\Omega}_{s+2N-1}) = 0, \quad s = 1, \dots, K - 2N.$$

В следующем разделе будет приведен способ нахождения оптимального решения, основанный на методе Нейштадта–Итона [3].

6. Численный алгоритм поиска начального значения сопряженного вектора

Неизвестные постоянные коэффициенты \mathbf{C} , входящие в оптимальное управление (19), однозначно вычисляются по начальному вектору $\boldsymbol{\psi}(0) = (\xi_1(0), \eta_1(0), \dots, \xi_N(0), \eta_N(0))^T$ для сопряженной системы уравнений (16) по следующему правилу:

$$(26) \quad \begin{aligned} \mathbf{C} &= (C_1^1, C_1^2, \dots, C_N^1, C_N^2) = \\ &= \left(\eta_1(0), -\frac{\xi_1(0)}{\omega_1}, \dots, \eta_N(0), -\frac{\xi_N(0)}{\omega_1} \right). \end{aligned}$$

Введем множество H_* , которое состоит из векторов $\boldsymbol{\psi}(0)$ и определяет удовлетворяющие граничным условиям (3) траектории $\mathbf{x}(t)$ системы (1).

Поиск $\boldsymbol{\psi}(0)$, основанный на итерационном алгоритме Нейштадта–Итона, приводится в виде последовательности шагов [3].

Инициализация. Задается \mathbf{x}_0 – фиксированный начальный вектор в (3). Выбирается начальный нормированный вектор $\boldsymbol{\psi}_0 = (\xi_1^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \dots, \xi_N^{(0)}, \eta_N^{(0)})^T = -\frac{\mathbf{x}_0}{|\mathbf{x}_0|}$.

Замечание 4. За начальный вектор $\boldsymbol{\psi}_0$ можно принять любой вектор, расположенный в полупространстве D , которое определяется гиперплоскостью, ортогональной вектору \mathbf{x}_0 .

Вводятся следующие величины:

$$(27) \quad I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_h) = \begin{pmatrix} \int_0^{F(\boldsymbol{\psi}_h)} \left(\frac{\sin \omega_1 \tau}{\omega_1} \right) \varepsilon \operatorname{sign} \left(\sum_{i=1}^N \eta_i^{(h)} \cos \omega_i \tau - \frac{\xi_i^{(h)}}{\omega_i} \sin \omega_i \tau \right) d\tau \\ - \int_0^{F(\boldsymbol{\psi}_h)} (\cos \omega_1 \tau) \varepsilon \operatorname{sign} \left(\sum_{i=1}^N \eta_i^{(h)} \cos \omega_i \tau - \frac{\xi_i^{(h)}}{\omega_i} \sin \omega_i \tau \right) d\tau \\ \dots \\ \int_0^{F(\boldsymbol{\psi}_h)} \left(\frac{\sin \omega_N \tau}{\omega_N} \right) \varepsilon \operatorname{sign} \left(\sum_{i=1}^N \eta_i^{(h)} \cos \omega_i \tau - \frac{\xi_i^{(h)}}{\omega_i} \sin \omega_i \tau \right) d\tau \\ - \int_0^{F(\boldsymbol{\psi}_h)} (\cos \omega_N \tau) \varepsilon \operatorname{sign} \left(\sum_{i=1}^N \eta_i^{(h)} \cos \omega_i \tau - \frac{\xi_i^{(h)}}{\omega_i} \sin \omega_i \tau \right) d\tau \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{\psi}_h = (\xi_1^{(h)}, \eta_1^{(h)}, \dots, \xi_N^{(h)}, \eta_N^{(h)})^T$ – вектор, построенный на h -м ($h = 0, 1, \dots$) шаге алгоритма. $F(\boldsymbol{\psi}_h)$ определяется как решение уравнения

$$(28) \quad \langle \boldsymbol{\psi}_h, \mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_h) \rangle = 0.$$

Шаг 1. Следующий вектор $\boldsymbol{\psi}_1$ определяется в соответствии с уравнениями:

$$(29) \quad \begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^{(m)} &= \boldsymbol{\psi}_0 - 2^{-m}(\mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_0)}(\boldsymbol{\psi}_0)), \\ \boldsymbol{\psi}_1 &= \frac{\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^{(m)}}{|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^{(m)}|}, \end{aligned}$$

при этом выбирается наименьшее из неотрицательных целых чисел m , для которых вектор $\boldsymbol{\psi}_1$ удовлетворяет неравенству

$$(30) \quad \langle \boldsymbol{\psi}_1, \mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_0)}(\boldsymbol{\psi}_1) \rangle < -\frac{|\mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_0)}(\boldsymbol{\psi}_0)|^2}{2^{m+1}}.$$

Шаг 2. Предполагая, что в этой же области индуктивно построены векторы $\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_h$, следующий вектор $\boldsymbol{\psi}_{h+1}$ определяется как

$$(31) \quad \begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_{h+1}^{(m)} &= \boldsymbol{\psi}_h - 2^{-m}(\mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_h)), \\ \boldsymbol{\psi}_{h+1} &= \frac{\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{h+1}^{(m)}}{|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{h+1}^{(m)}|}, \end{aligned}$$

при этом выбирается наименьшее из неотрицательных целых чисел m , для которых вектор $\boldsymbol{\psi}_{h+1}$ удовлетворяет неравенству

$$(32) \quad \langle \boldsymbol{\psi}_{h+1}, \mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_{h+1}) \rangle < -\frac{|\mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_h)|^2}{2^{m+1}}.$$

Тогда либо $\boldsymbol{\psi}_h \in H_*$ для некоторого h , либо построение приводит к бесконечной последовательности векторов $\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots$, лежащих в полупространстве D и обладающих следующими свойствами:

- 1) числа $F(\boldsymbol{\psi}_0), F(\boldsymbol{\psi}_1), F(\boldsymbol{\psi}_2), \dots$ образуют монотонно возрастающую последовательность, сходящуюся к числу T^0 ;
- 2) $\lim_{h \rightarrow \infty} I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_h) = \mathbf{x}_0$;
- 3) последовательность векторов $\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots$ приближается к множеству H_* .

Замечание 5. О нахождении решения уравнения (28).

Функция $\langle \boldsymbol{\psi}_h, \mathbf{x}_0 - I_t(\boldsymbol{\psi}_h) \rangle$ является непрерывной по переменным $\boldsymbol{\psi}_h, t$. При любом фиксированном $\boldsymbol{\psi}_h$ она монотонно возрастает по t [3]. Поэтому решение уравнения (28) определяется через построение значений указанной функции для возрастающей последовательности $F(\boldsymbol{\psi}_h)$ с использованием метода бисекции и численного интегрирования.

7. Моделирование

Для демонстрации результатов, полученных в разделах 5, 6, приводится расчет оптимального управления для системы двух несинхронных осцилляторов ($\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1,4$) с использованием как необходимых условий экстремума, так и метода Нейштадта–Итона. Здесь и далее для ограничения на управление выберем значение $\varepsilon = 0,4$.

Рассматривается множество начальных состояний системы $x_0 = (q_1^*, p_1^*, 0, 0)^T$, где $|q_1^*| < 2,2$, $|p_1^*| < 1,5$ (множество управляемости). Для классов трех ($K = 4$) и четырех ($K = 5$) переключений производится поиск решений в соответствии с леммой 3. Каждое полученное решение проверяется на соответствие тому классу переключения, в рамках которого оно было найдено. В соответствии с замечанием 3 исследовать нужно только половину рассматриваемой области. Результат в виде размеченного множества управляемости, куда также включен класс двух переключений, аналитическое описание которого можно найти в работе авторов [22], представлен на рис. 2. Количество переключений управления отмечено на графике числами. Изображенные плюсами и минусами точки соответствуют управлениям со значением

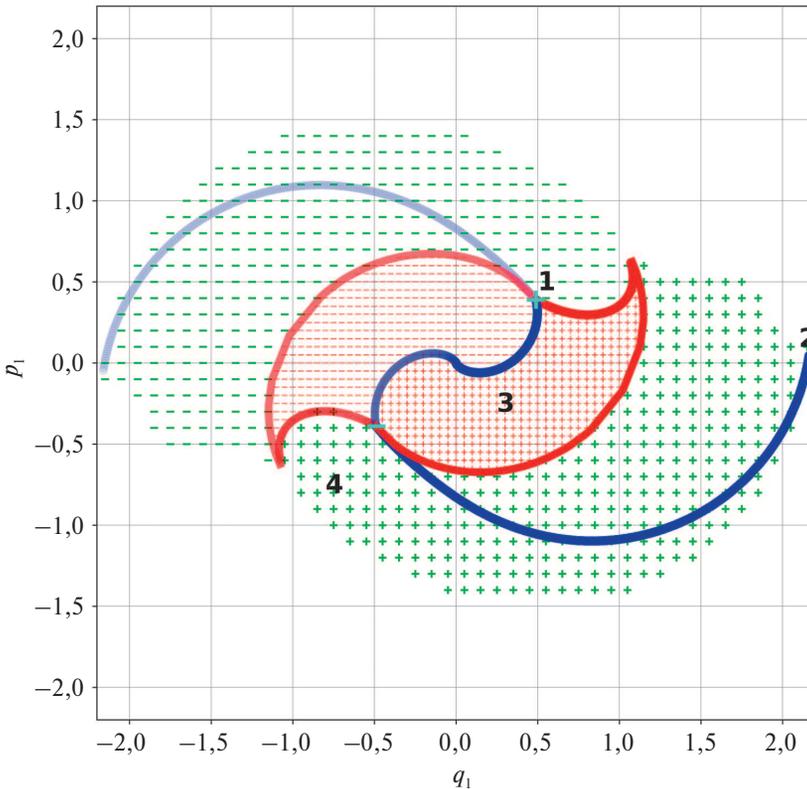


Рис. 2. Множество управляемости первого осциллятора (лемма 3).

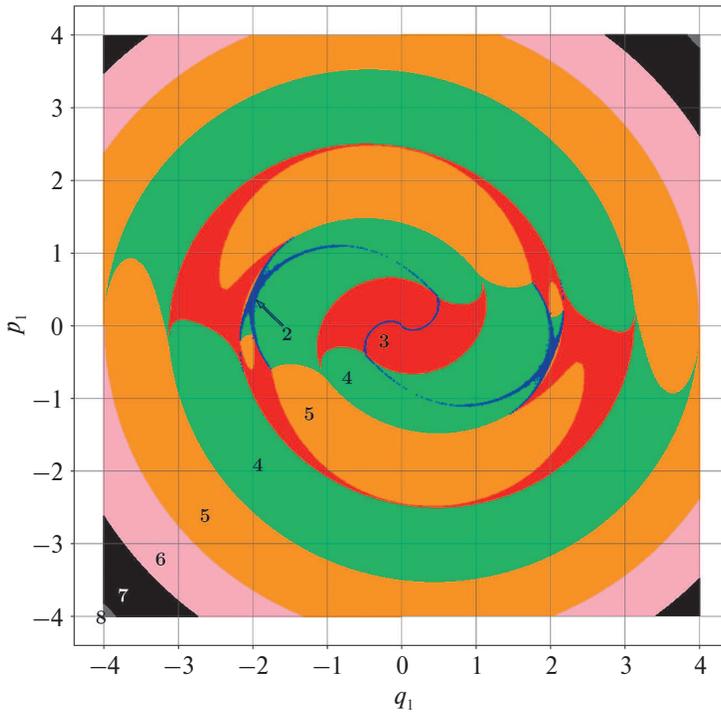


Рис. 3. Множество управляемости первого осциллятора (метод Нейштадта–Итона).

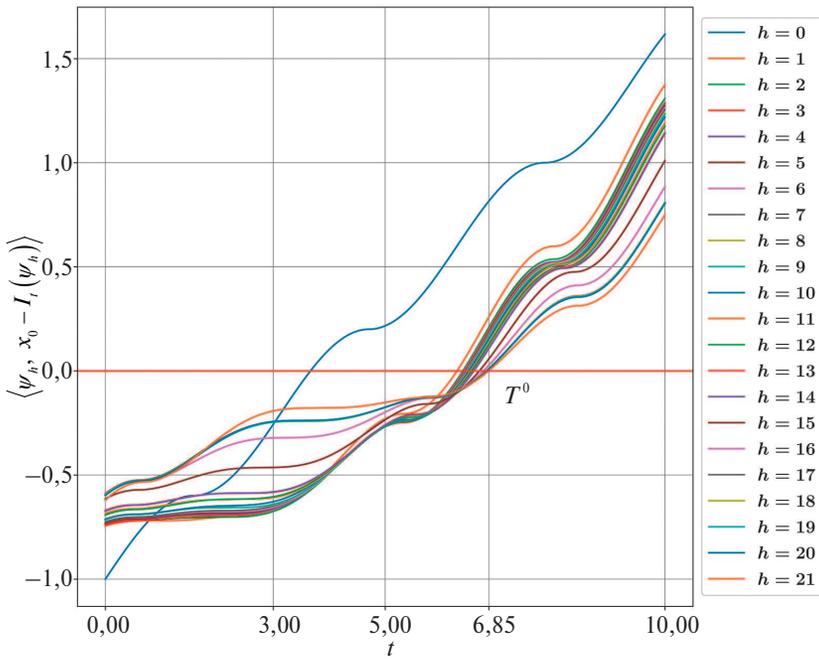


Рис. 4. График уравнений (28) для различных значений h .

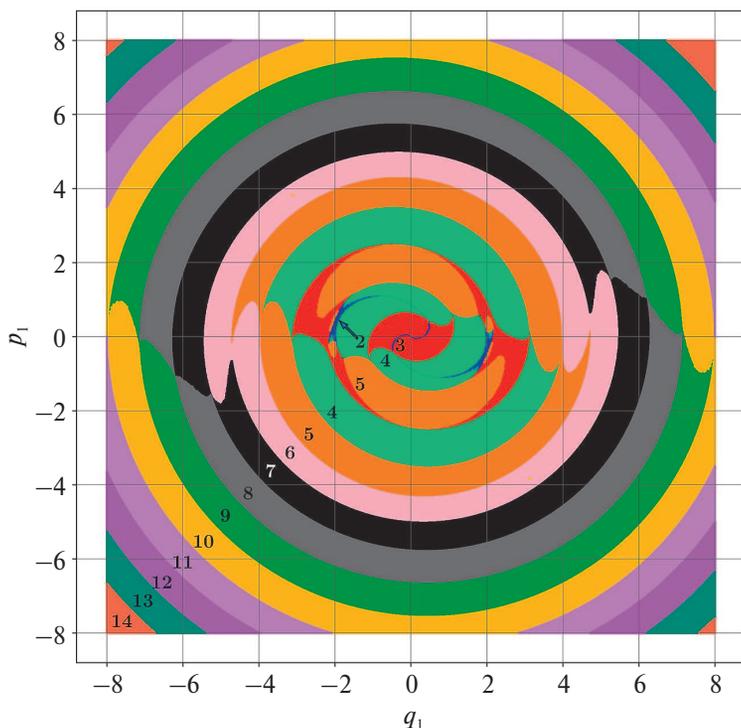


Рис. 5. Множество управляемости первого осциллятора.

ε и $-\varepsilon$ на первом интервале соответственно. Кривым двух переключений с высокой прозрачностью отвечают управления, принимающие отрицательные значения на первом интервале. Отмечаются следующие особенности предлагаемого подхода: отсутствие информации о допустимости использования того или иного класса управления для конкретного начального условия, что приводит к необходимости исследования различных K , сложность поиска решения системы нелинейных уравнений порядка K . Однако указанный метод позволяет исследовать случаи различных вырождений, как например, класс двух переключений, и получать аналитические конструкции для формирования границ классов, чему и отвечают синие и красные кривые на рис. 2.

На рис. 3 приводится классифицированная плоскость первого осциллятора, полученная с использованием метода Нейштадта-Итона. Основными параметрами при нахождении нового приближения ψ_h были точность определения корня уравнения (28) и ограничение на величину ошибки, определяемой как евклидово расстояние от конца найденной траектории до начала координат. Каждое новое найденное значение $F(\psi_h)$ используется в качестве начального приближения для определения $F(\psi_{h+1})$ в силу монотонного возрастания чисел $F(\psi_0), F(\psi_1), \dots$. Сказанное иллюстрируется на рис. 4, где представлен график функций $\langle \psi_h, \mathbf{x}_0 - I_t(\psi_h) \rangle$ для различных h при выборе начального вектора $\mathbf{x}_0 = (0, 1, 0, 0)^T$.

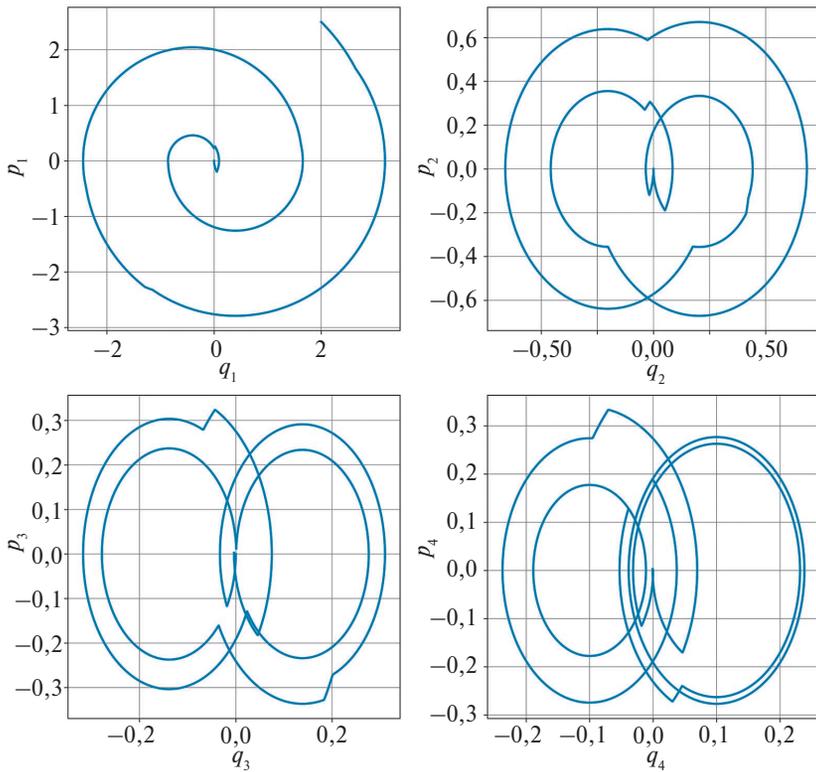


Рис. 6. Фазовые плоскости четырех осцилляторов.

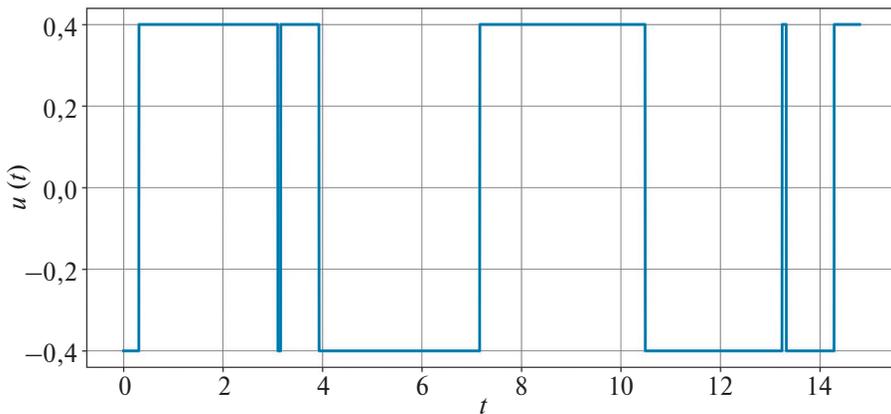


Рис. 7. Скалярное управление с девятью переключениями для системы четырех осцилляторов.

На рис. 5 приводится анализ большего множества управляемости, которое включает в себя 14 классов управления с учетом вырожденных классов одного и двух переключений. Количество переключений управления также отмечено на графике числами.

Для иллюстрации работы метода Нейштадта–Итона приводится пример для четырех несинхронных осцилляторов со следующими параметрами:

$$(33) \quad \varepsilon = 0,4, \quad \{\omega_i\}_{i=1}^4 = \{1, 1,4, 1,7, 2\}, \quad \mathbf{x}_0 = (2, 2,5, 0, \dots, 0, 0)^T.$$

В результате работы алгоритма были получены: начальный вектор сопряженной системы

$$\psi(0) = (-0,336, -0,372, -0,334, -0,149, -0,504, -0,158, -0,562, 0,141)$$

и критерий задачи $T^0 = 14,795$. Траектории движения осцилляторов приводятся на рис. 6 с общим скалярным управлением, отображенным на рис. 7.

Стоит отметить, что программная реализация алгоритма Нейштадта–Итона работает достаточно быстро и эффективно, задавая приближенную классификацию множества управляемости первого осциллятора по количеству переключений управления. Что, в свою очередь, определяет области значений констант фундаментального решения сопряженной системы для их поиска из необходимых условий экстремума.

8. Заключение

В статье рассмотрена задача оптимального управления группой несинхронных осцилляторов с одним скалярным управляющим воздействием по критерию быстродействия. Показана связь между множеством достижимости и управляемости. Для перевода группы осцилляторов в состояние покоя найдены траектории с помощью необходимых условий экстремума и с использованием итерационного алгоритма Нейштадта–Итона. Проведено сравнение полученных классификаций траекторий на основе количества переключений релейного управления. Результаты работы итерационного алгоритма, такие как класс переключений, оценка времени движения системы и моментов переключения, могут быть использованы в качестве начального приближения для поиска решения на основе необходимых условий экстремума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eaton J.H.* An iterative solution to time-optimal control // *J. Math. Anal. Appl.* 1962. V. 5. No. 2. P. 329–344.
2. *Neustadt L.W.* Synthesizing time optimal control systems // *J. Math. Anal. Appl.* 1960. V. 1. P. 484–493.
3. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
4. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
5. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
6. *Пшеничный Б.Н.* Численный метод расчета оптимального по быстродействию управления для линейных систем // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 1964. Т. 4. № 1. С. 52–60.
7. *Старов В.Г.* Улучшение сходимости метода Нейштадта–Итона // *Мат. зам. СВФУ.* 2019. Т. 26. № 1. С. 70–80. <https://doi.org/10.25587/SVFU.2019.101.27248>

8. Рабинович А.Б. Об одном классе методов итерационного решения задач быстрогодействия // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6. № 3. С. 433–445.
9. Пшеничный Б.Н., Соболенко Л.А. Ускоренный метод решения задачи линейного быстрогодействия // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. Т. 8. № 6. С. 1345–1352.
10. Поляк Б.Т. Сходимость методов возможных направлений в экстремальных задачах // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т. 11. № 4. С. 855–869.
11. Александров В.М. Вычисление оптимального управления в реальном времени // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 10. С. 1778–1800.
12. Шевченко Г.В. Численный алгоритм решения линейной задачи оптимального быстрогодействия // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 8. С. 1166–1178.
13. Шевченко Г.В. Метод численного решения нелинейной задачи оптимального быстрогодействия с аддитивным управлением // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 11. С. 1843–1854.
14. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
15. Овсеевич А.И., Федоров А.К. Асимптотически оптимальное управление в форме синтеза для системы линейных осцилляторов // Докл. РАН. 2013. Т. 452. № 3. С. 266–270. <https://doi.org/10.7868/s0869565213280050>
16. Каюмов О.Р. Оптимальное по быстроддействию перемещение платформы с осцилляторами // ПММ. 2021. Т. 85. № 6. С. 699–718. <https://doi.org/10.31857/S0032823521060072>
17. Berlin L.M., Galyaev A. A., Lysenko P.V. Time-optimal control problem of two non-synchronous oscillators // Mathematics. 2022. P. 3552. <https://doi.org/10.3390/math10193552>
18. Galyaev A.A. Scalar control of a group of free-running oscillators // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 9. P. 1511–1523. <https://doi.org/10.1134/S0005117916090010>
19. Сачков Ю.Л., Аграчев А.А. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
20. Wyrwas M. Strong accessibility and integral manifolds of the continuous-time nonlinear control systems // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 469. No. 2. P. 935–959. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.09.045>
21. Benzaid Z. Global null controllability of perturbed linear systems with constrained controls // J. Math. Anal. Appl. 1988. V. 136. No. 1. P. 201–216. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(88\)90126-6](https://doi.org/10.1016/0022-247X(88)90126-6)
22. Берлин Л.М., Галеев А.А., Кравцова С.К. О классе двух переключений управления в задаче быстрогодействия двух несинхронных осцилляторов // УБС. 2023. Т. 101. С. 24–38. <https://doi.org/10.25728/ubs.2023.101.2>

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 12.03.2024

Принята к публикации 20.03.2024